

5. Übung zur Vorlesung Mathematik II für Bauingenieure

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Für "kleine x " wird für die Funktion $f(x) := \sin(x)$ oft die Näherung $\sin(x) \approx x$ verwendet. Wie ist diese Näherung zu rechtfertigen?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorpolynome ersten, zweiten und dritten Grades, $T_1(x)$, $T_2(x)$ und $T_3(x)$, zur Funktion

$$p(x) := (x - 1)^3$$

an der Stelle $x_0 = 2$. Zeichnen Sie sie zusammen mit $p(x)$ im Bereich $0 < x < 2$. Welche Beziehung besteht zwischen $T_3(x)$ und $p(x)$?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(x)$ und dritten Grades $T_3(x)$ zu

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ und geben Sie eine Abschätzung des Fehlers für das Intervall $[0, 2]$ an. Zeichnen Sie $f(x)$, $T_2(x)$ und $T_3(x)$ im angegebenen Intervall.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Betrachten Sie das "Polynom unendlichen Grades"

$$p(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}.$$

Noch im 18. Jahrhundert rechnete man mit unendlichen Polynomen (Potenzreihen), ohne sich um Konvergenz zu kümmern. Welche reelle Zahlen dürfen für die angegebene Reihe für x eingesetzt werden und welche nicht?

b) Berechnen Sie formal die Ableitung $p'(x)$. Welchen Konvergenzradius hat $p'(x)$?

c) Welche Funktion stellt $p'(x)$ im Konvergenzintervall dar? Welche Funktion stellt $p(x)$ dar?

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Taylorpolynom von Grad n zu

$$f(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und vergleichen Sie es mit der Potenzreihendarstellung des Sinus.

Abgabetermin: 28.05.2004 .