Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

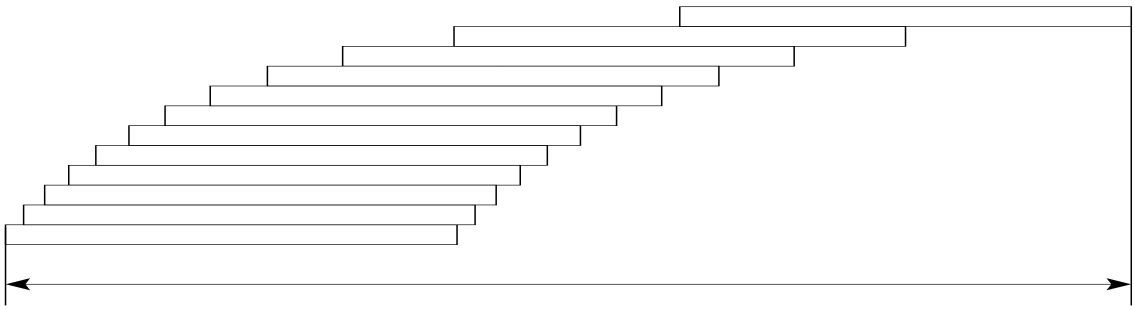
Prof. Dr. A. Klawonn

Wintersemester 2003/04
23.1.2004

Dr. A. Kovac
Dr. D. Krutikov
Dipl.-Math. O. Rheinbach

12. Übung zur Vorlesung Mathematik für Bauingenieure I

Aufgabe 1 (10 Punkte)



Aus gleich großen Betonplatten der Länge 2m soll eine "Brücke" gebaut werden. Die Platten, die auf einem Stapel liegen, werden so zu einer Seite verschoben, dass der Stapel gerade nicht umkippt. Wie weit reicht die Brücke bei der Verwendung von n Betonplatten?
Hinweis: Nummerieren Sie die Platten von oben nach unten und berechnen Sie die maximale Verschiebung s_n der n-ten Platte gegenüber der ersten.
Betrachten Sie dazu die Schwerpunkte der Platten.

Wie groß sind s_{20} und s_{100}? Wie verhält sich s_n für $n \to \infty$? Wie groß ist die Entfernung, die auf diese Weise überbrückt werden kann?

Aufgabe 2 (9 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, und berechnen Sie in $d)$ auch den Wert der Reihe.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n \cdot 2^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+4} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+5} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4 \cdot 3^n}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n!}$$

Aufgabe 3 (5+3 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$a)\ \lim_{x \to -2} \frac{3x+6}{x^3+8} \qquad b)\ \lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|} \qquad c)\ \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \qquad d)\ \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1-|x|} \qquad e)\ \lim_{x \to -1} \frac{1-x}{1-|x|}$$

$$f)\ \lim_{x \to 1} \frac{1-x^{2n+1}}{1-x}, \qquad \text{wobei } n \in \mathbb{N} \text{ beliebig}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Welche der folgenden Funktionen sind stetig, welche stetig ergänzbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$a)\quad f(x)=\frac{3x+6}{x^3+8}\qquad b)\quad f(x)=|x|\qquad c)\quad f(x)=\frac{1}{x}$$

$$d)\quad f(x)=\frac{1-x}{1-|x|}\qquad e)\quad f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{für } x>1\\ 2-x & \text{für } x\le 1\end{cases}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte) (Der antike Wettlauf)
Der große Achilles und die langsame Schildkröte laufen um die Wette. Achilles läuft zehnmal so schnell wie die Schildkröte, und die Schildkröte bekommt daher einen Vorsprung von 1000 Schritten. Die Griechen argumentierten: Zwar hat Achilles nach kurzer Zeit (t) die 1000 Schritte hinter sich gebracht, aber da ist ihm die Schildkröte schon 100 Schritte voraus. Wenn Achilles diese 100 Schritte gelaufen ist, ist die Schildkrote wiederum 10 Schritte weiter gelaufen. Holt Achilles die Schildkröte also nie ein? Dieses Problem konnten die Griechen nicht lösen.
Wann holt Achilles die Schildkröte ein?

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Zeigen Sie: Jedes reelle Polynom ungerade Grades besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

Aufgabe 7 (6 Punkte)
Die Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ seien stetig und es gelte $f(x)\le g(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Es sei weiterhin $f(x_0)=g(x_0)$. Zeigen Sie: Eine Funktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, für die gilt $f(x)\le h(x)\le g(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$, ist im Punkt x_0 stetig.

Klausurtermine:
5. 8. 2004
9. 9. 2004

Abgabetermin: 30.1.2004 .