Universität Duisburg-Essen
Standort Essen

Prof. Dr. A. Klawonn

Wintersemester 2003/04
7.11.2003

Dr. A. Kovac
Dr. D. Krutikov
Dipl.-Math. O. Rheinbach

4. Übung zur Vorlesung Mathematik für Bauingenieure I

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Betrachten Sie die acht Vektorraumaxiome. Legen Sie anhand von acht Skizzen mit Vektorpfeilen ihre geometrische Bedeutung dar.

Aufgabe 2 (4+3+4 Punkte)

Gegeben seien zwei Vektoren $x, y \in \mathbf{R}^2$

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $x + y$, $x - y$, $\frac{1}{2}x$, $\langle x, y \rangle$ und den Winkel α zwischen x und y.

b) Finden Sie zwei verschiedene Vektoren, die orthogonal auf x stehen und die gleiche Länge wie x haben, sowie zwei Vektoren, die senkrecht auf y stehen und die gleiche Länge wie y haben.

c) Stellen Sie eine Vermutung auf, wie man zu einem Vektor $x \in \mathbf{R}^2, x = (x_1, x_2)^T$ die beiden orthogonalen Vektoren gleicher Länge finden kann.

d) Beweisen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes, dass Ihre Vermutung richtig ist. (Das Skalarprodukt ist definiert als $\langle x, y \rangle = \sqrt{x_1 y_1 + x_2 y_2}$.)

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zerlegen Sie das Polynom

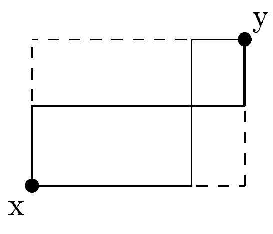
$$p(x) := 2x^3 + 4x^2 - 32x - 64$$

durch Polynomdivision in seine Linearfaktoren.
Tipp: Es gilt $p(-2) = p(4) = 0$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Die sogenannte Manhattan-Norm eines Vektors $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ist definiert durch

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$



Die Manhattan-Distanz zwischen zwei Punkten $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ist dann gegeben durch

$$\|x - y\|_1 := \sum_{k=1} |x_k - y_k|.$$

Zeigen Sie, dass die Manhattan-Norm $\|\cdot\|_1$ die Normaxiome erfüllt, also tatsächlich eine Norm darstellt. Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem die Manhattan-Norm-Einheitskugel ein, d.h. die Menge aller Vektoren $x \in \mathbf{R}^2$, für die gilt $\|x\|_1 \leq 1$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Beweisen Sie die Rechteckregel für Tischler: "Ein Fensterrahmen ist rechteckig, wenn die beiden Diagonalen gleich lang sind." Legen Sie dazu die linke untere Ecke des Rahmens in den Nullpunkt des Koordinatensystems und verwenden Sie das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Eine Tasse Tee steht auf einem Ebene, die um 15 Grad gegen die Horizontale geneigt ist. Die Gewichtskraft beträgt 2 N. Mit welcher Kraft drückt die Tasse gegen die Ebene?

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Die Distanz in der Metrik des französischen Eisenbahnnetzes ist für $x, y \in \mathbf{R}^2$

$$d_{SNCF}(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{falls } x = \lambda y, \qquad \lambda \in \mathbf{R} \text{ beliebig} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst,} \end{cases} ,$$

wobei $\|\cdot\|$ die herkömmliche euklidische Norm bedeutet.
Zeigen Sie, dass die Dreiecksungleichung $d_{SNCF}(x,y) \leq d_{SNCF}(x,z) + d_{SNCF}(z,y)$ gilt. Zeichnen Sie alle Punkte in ein Koordinatensystem, die von Punkt Lyons $x_L = (1,-1)^T$ den Abstand 1 und den Abstand 2 haben. Wo liegt Paris?

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Es sei $z = 2 - 4i$. Geben Sie alle vierten Wurzeln von z an.

Abgabetermin: 14.11.2003 .