

8. Übung zur Vorlesung Mathematik für Bauingenieure I

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen

$$\begin{aligned} -1x - 2y + 2z &= -6 \\ 4x + 2y + 4z &= 18. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben seien die vier Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -18 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis des \mathbb{R}^4 ist.
2. Stellen Sie $b = (3, 6, -6, 13)^T$ in dieser Basis dar.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 10 & 15 & 15 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$a := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Geben Sie alle Lösungen der Gleichungssysteme $Ax = a$ und $By = b$ an.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Wie müssen $a, b \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. genau eine Lösung hat,
2. keine Lösung hat,
3. unendlich viele Lösungen hat?

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, die die Vektoren

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } F(v) := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } F(w) := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

abbildet.

1. Was ist $F(u)$ für $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

2. Wie lautet die Matrixdarstellung der linearen Abbildung F bezüglich der Basis

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}?$$

3. Wie lautet die Matrixdarstellung von F bezüglich der kanonischen Einheitsbasis?

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Geben Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & 7 \\ -8 & -20 & 12 & -9 \\ -2 & -5 & 3 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}$$

an.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Eva ist doppelt so alt, wie Anna war, als Eva so alt war, wie Anna jetzt ist.

Wie alt ist Anna?

Abgabetermin: 19.12.2003 .