Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Prof. Dr. A. Klawonn

Wintersemester 2003/04
19.12.2003

Dr. A. Kovac
Dr. D. Krutikov
Dipl.-Math. O. Rheinbach

Weihnachtsübung zur Vorlesung Mathematik für Bauingenieure I

Aufgabe 1 (24 Punkte)

a) Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) & := & \begin{pmatrix} x \\ y+2z \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Zeigen Sie, dass f linear ist.
2) Berechnen Sie die zugehörige Matrix bzgl. der kanonischen Einheitsbasis (e_1, e_2, e_3).

b) Betrachten Sie die folgende Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & f(x) & := & x + \langle b, x\rangle\, a \end{array}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, $\langle b, x\rangle = b^T x$ und $\langle a, b\rangle = 0$. Eine solche Abbildung heißt *Scherung* des $\mathbb{R}^3$ in Richtung a senkrecht zu b.

1) Fertigen Sie eine Zeichnung an, aus der man das Verhältnis von $a, b, x, f(x)$ und $\langle b, x\rangle\, a$ ablesen kann.
2) Zeigen Sie, dass f linear ist.
3) Zeigen Sie, dass die zugehörige Matrix bezüglich der kanonischen Basis (e_1, e_2, e_3) $I_n + ab^T$ ist.
4) Zeigen Sie, dass es sich bei der Abbildung aus a) um eine Scherung handelt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Welche Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sind mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

vertauschbar, d.h. es gilt

$$AB = BA \quad ?$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Prüfen Sie, ob die folgenden Matrixgleichungen sinnvoll und lösbar sind, und bestimmen Sie, falls möglich, mindestens eine Lösung M_i (Beachten Sie, dass M_i eine passende Matrix ist):

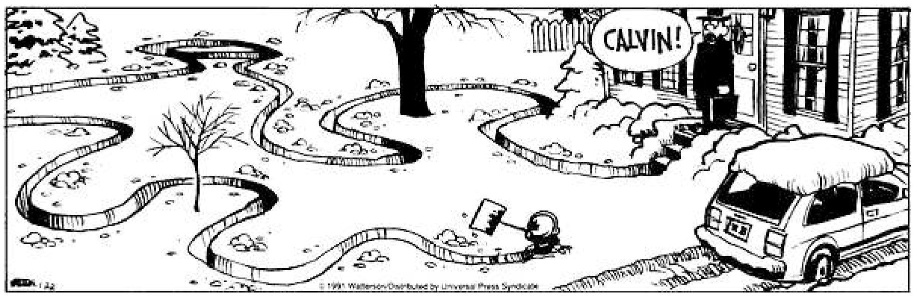
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}^T \cdot M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot M_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}^T.$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Die lineare Abbildung T habe in der kanonischen Basis die Matrixdarstellung

$$A = \begin{pmatrix} 120 & 144 \\ -72 & -84 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie T in der Basis $B = (\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix})$ dar.



Abgabetermin: 9.1.2004 .

Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches neues Jahr 2004 !