

2. Übung zur Vorlesung Numerische Mathematik I

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Ein Extremum der Funktion

$$f(x, y) = (x - 1)^4 + 2(x - 1)^2(y + 1)^2 + (y + 1)^4 - 2(x - 1)^2 - 2(y + 1)^2 + 1$$

soll berechnet werden, indem das Newton-Verfahren auf die notwendige Bedingung

$$g(x, y) := \nabla f(x, y) = 0$$

angewendet wird.

a) Berechnen Sie ∇f und stellen Sie das Newton-Verfahren für $g(x, y)$ auf.

b) Programmieren Sie das Newton-Verfahren in Matlab und starten Sie es mit $x_0 = (1.21, -1.15)^T$. Iterieren Sie solange, bis $\|x^{k+1} - x^k\| < 10^{-4}$. Um welche Art von Extremum handelt es sich?

c) Erstellen Sie mit Matlab/Octave eine graphische Darstellung der Funktion im Bereich $[-0.2, 2.2] \times [-2.2, 0.2]$ mit den folgenden Befehlen.

```
x=-0.2:0.05:2.2
y=-2.2:0.05:0.2
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=(X-1).^4 + 2*(X-1).^2.*(Y+1).^2 + (Y+1).^4 - 2*(X-1).^2 - 2*(Y+1).^2 + 1;
mesh(x,y,Z);
```

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Konstruieren Sie Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die linear, quadratisch und kubisch gegen den Grenzwert 1 konvergieren.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die positive Nullstelle \sqrt{a} von $f(x) = x^2 - a$ mit $a > 0$ soll mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden. Geben Sie (mit Beweis) alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ an, für die die Newton-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Programmieraufgabe 1 (15 Punkte)

Programmieren Sie das Newton-Verfahren, das Sekantenverfahren und die Fixpunktiteration in Matlab. Testen Sie das Newton-Verfahren und das Sekantenverfahren an $f(x) = x^3 - 2$. Testen Sie die Fixpunktiteration an dem Beispiel aus Aufgabe 3 des ersten Übungsblattes.

Abgabetermin: 1.11.2004 .