

3. Übung zur Vorlesung Numerische Mathematik I

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit vollem Rang. Zeigen Sie, dass die Matrix $A^T A$ symmetrisch positiv definit ist. Für welche C ist $A^T C A$ symmetrisch positiv definit?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \end{pmatrix}$$

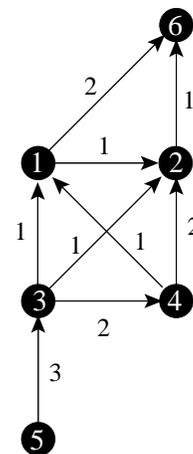
Betrachten Sie die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$. Zeigen Sie, dass g bezüglich einer der Normen kontrahierend ist, jedoch nicht bezüglich der anderen Norm.

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Betrachten Sie den nebenstehenden gerichteten Graphen $G = (V, E)$. Interpretieren Sie ihn als elektrisches Netzwerk.

Die Kantengewichte geben die elektrische Leitfähigkeit an. Am Knoten 5 befindet sich eine Quelle, die 1 Ampère in das Netzwerk einspeist und am Knoten 6 die entsprechende Senke, die 1 Ampère Strom aufnimmt.

Schreiben Sie dazu ein kurzes Matlab-Programm, in dem Sie analog zur Vorlesung die Matrizen A und C definieren und die Systemmatrix $A^T C A$ berechnen. Berechnen Sie die Potentiale zu allen Knoten, indem Sie den “\”-Operator verwenden und erden Sie dabei den 1. Knoten. Berechnen Sie wie in der Vorlesung aus den Potentialen die Ströme, die auf den Kanten fließen.



Bemerkung: Mit

$$B(1, :) = [\]$$

können Sie in Matlab die erste Zeile der Matrix B streichen und mit

$$B(:, 1) = [\]$$

streichen Sie entsprechend die erste Spalte. Mit

$$x = [0; x; \]$$

verlängern Sie den Vektor x oben um eine Null.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Betrachten Sie das Newton-Verfahren aus der Programmieraufgabe 1 auf dem 2. Blatt. Implementieren Sie das vereinfachte Newton-Verfahren, indem Sie Ihr Programm leicht abändern. Vergleichen Sie die Anzahl der Iterationen, die notwendig sind, um eine Genauigkeit von 10^{-10} zu erreichen.