Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Prof. Dr. A. Klawonn
Dipl.-Math. O. Rheinbach

Wintersemester 2004/05

8.11.2004

4. Übung zur Vorlesung Numerische Mathematik I

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die komponentenweise Form und die Matrix-Form des Jacobi-Verfahrens und des Gauß-Seidel-Verfahrens übereinstimmen, d.h. zeigen Sie, dass

$$Dx^{(k+1)} + Lx^{(k)} + Rx^{(k)} = b \qquad \Leftrightarrow \qquad x_i^{k+1} = \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

und

$$(D+L)x^{(k+1)} + Rx^{(k)} = b \qquad \Leftrightarrow \qquad x_i^{k+1} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)^T$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie die Aussagen 2 und 3 von Korollar 3.3.1 der Vorlesung.
Die zugeordnete Matrixnorm hat die folgenden Eigenschaften:

1. Sei λ ein Eigenwert der Matrix A, dann gilt: $\|A\| \geq |\lambda|$.
2. Für beliebige $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times k}$ gilt: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Programmieren Sie das Jacobi und das Gauß-Seidel-Verfahren in Matlab für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und rechte Seiten $b \in \mathbb{R}^n$.
Lösen damit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bis $\frac{\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\|}{\|x^{(i)}\|} \leq 10^{-6}$. Wieviele Iterationsschritte brauchen Sie dafür?

Aufgabe 4 (6 Punkte) (Max. Zeilensummennorm im Komplexen)
Finden Sie einen Vektor $y \in \mathbb{C}^n$ mit $\|y\|_\infty = 1$ so, dass für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\|Ay\|_\infty \geq \|A\|_\infty \; .$$

D.h.: Finden Sie einen komplexen Vektor, für den $\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty$ angenommen wird.

Bemerkung: Bitte geben Sie alle Programme sowohl gedruckt, als auch in elektronischer Form ab. Sollten Sie die Programme per E-Mail schicken, dann senden Sie sie bitte als eine einzige zip-Datei mit Ihrem Nachnamen als Dateinamen und mit dem Subject `Uebung`. Bitte fügen Sie jeweils Programme `start1.m`, `start2.m`, usw. bei, die die notwendigen Initialisierungen vornehmen und die gewünschte Aufgabe lösen.

Abgabetermin: 15.11.2004 .