

## 6. Übung zur Vorlesung Numerische Mathematik I

### Aufgabe 1 (9 Punkte)

Zeigen Sie für  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^H A),$$

wobei  $A^H := \bar{A}^T$  und  $\rho(A^H A)$  der Spektralradius von  $A^H A$  ist.

### Aufgabe 2 (9 Punkte)

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine Matrix mit vollem Rang,  $b \in \mathbb{R}^m$  und  $\|x\|^2 := x^T x$ . Leiten Sie aus der Minimierungsaufgabe

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

die Normalgleichungen her. Gehen Sie dabei nicht wie in der Vorlesung vor, sondern verwenden Sie analytische Hilfsmittel.

### Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegen seien  $n$  Messwerte  $a_1, \dots, a_n$  für eine unbekannte Größe  $x$ . Stellen Sie ein überbestimmtes Gleichungssystem auf, mit  $x$  als Variablen und dem Vektor  $(a_1, \dots, a_n)^T$  als rechter Seite. Lösen Sie dieses Gleichungssystem mit Hilfe der Normalgleichungen. Welches bekannte Ergebnis erhalten Sie?

### Aufgabe 4 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass das überbestimmte Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64.334 \\ 349.366 \\ 283.596 \\ 206.580 \\ -76.108 \\ 648.427 \\ 719.612 \end{pmatrix}$$

nicht lösbar ist.

**Aufgabe 5 (8 Punkte)**

Bestimmen Sie die verallgemeinerte Inverse (Moore-Penrose-Inverse) des dyadischen Produkts  $vu^H$  mit  $v, u \in \mathbb{K}^n$  und  $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$ .

**Aufgabe 6 (9 Punkte)**

Betrachten Sie die Aufgabe 2, Blatt 5. Entwerfen Sie ein IEEE-Format ("IEEE-half") auf dieser Grundlage. Das heisst, entwerfen Sie analog zu den IEEE-Formaten ein Fliesskommaformat mit einer 2 Bit langen Mantisse, einem "hidden bit", einem Vorzeichenbit und einem zwei Bit langen Exponenten. Fügen Sie auch subnormale Zahlen in Ihren Entwurf ein. Zeichnen Sie die Maschinenzahlen Ihres Formates auf einer Zahlengeraden ein. Welches sind die Vorteile und Nachteile Ihres Formates gegenüber dem Format in Aufgabe 2, Blatt 5?

**Abgabetermin: 29.11.2004 14:00 (im Kasten).**