

7. Übung zur Vorlesung Numerische Mathematik I

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei A^+ die verallgemeinerte Inverse von A . Zeigen Sie

1. $AA^+A = A$
2. Ist A eine normale $n \times n$ -Matrix, d.h. $AA^T = A^T A$, so gilt $AA^+ = A^+A$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien P_1, \dots, P_n Orthogonalprojektionen. Zeigen Sie, dass gilt

$$I - \sum_{i=1}^n P_i = \prod_{i=1}^n (I - P_i).$$

Begründen Sie ausführlich, dass die beiden Algorithmen, die in der Vorlesung als modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren (MGS) und Gram-Schmidt-Verfahren (GS) eingeführt wurden, mathematisch äquivalent sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Programmieren Sie das Gram-Schmidt-Verfahren (GS) und das modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren (MGS) in Matlab. Testen Sie beide Routinen an der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

wobei x_1, \dots, x_n gleichmäßig im Intervall $[1, 2]$ verteilt sind. Erzeugen Sie dazu aus den Spalten von A eine ONB. Wählen Sie $n = 3, 10, 20, 30$.

Die Matrix A erhalten Sie z.B. aus der folgenden Routine:

```
function A=vandermonde(N)
    x=linspace(1,2,N)';
    A=zeros(N,N);
    for i=1:N
        A(:,i)=x.^(i-1);
    end
```

Testen Sie die Orthogonalität der Vektoren untereinander! Wie gut ist die Orthogonalität im besten und im schlechtesten Fall erfüllt?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Programmieren Sie die reduzierte QR -Zerlegung mit dem MGS-Verfahren in Matlab in der Form, in der sie in der Vorlesung vorgestellt wurde. Testen Sie Ihre Routine an den Matrizen aus Aufgabe 3. Lösen Sie damit das Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit $b = (1, \dots, 1)^T$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Der Gezeitenwasserstand in der Nordsee werde in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) durch

$$H(t) := h + a \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + b \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

mit unbekanntenen Konstanten h, a, b beschrieben. Folgende Messwerte liegen vor:

t	0	2	4	6	8	10	Stunden
$H(t)$	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	Meter

Berechnen Sie h, a und b mit einer QR -Zerlegung. Verwenden Sie dazu Ihr Programm aus Aufgabe 3.

Abgabetermin: 6.12.2004 14:00 (im Kasten).